



ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου

Α2 α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΕΒΔ$

- $\widehat{ΒΔΑ} = \widehat{ΒΔΕ} = 90^\circ$
- $ΑΔ = ΔΕ$ (υπόθεση)
- $ΒΔ$ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΜ$ και $ΖΓΜ$

- $ΒΜ = ΜΓ$ ($ΑΜ$ διάμεσος)
- $ΑΜ = ΜΖ$ (υπόθεση)
- $\widehat{ΑΜΒ} = \widehat{ΓΜΖ}$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

B3. Από την σύγκριση στο ερώτημα B1 έχουμε ότι $AB = BE$ (1)

Από την σύγκριση στο ερώτημα B2 έχουμε ότι $AB = GZ$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $BE = GZ$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και ΓBE

- $AB = B\Gamma$ (υπόθεση)
- $A\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $B\Delta = BE$ (υπόθεση)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Γ2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $A\Gamma E$

- $A\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{A}$ (από την 1^η σύγκριση)
- $A\Gamma$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Γ3.

1^{ος} Τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι $M\hat{A}\hat{\Gamma} = M\hat{\Gamma}\hat{A}$ το οποίο ισχύει από το συμπέρασμα του ερωτήματος Γ2.

2^{ος} Τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι: $AM = M\Gamma$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔAM και $E\Gamma M$

- $A\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{M} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{M}$ (από το συμπέρασμα του ερωτήματος Γ2)

- $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{M} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{M}$ (ως διαφορά ίσων γωνιών $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{A}$
– $M\hat{A}\hat{\Gamma} = M\hat{\Gamma}\hat{A}$)

$$\hat{\Delta}\hat{A}\hat{M} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{M})$$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $AM = MG$ συνεπώς το τρίγωνο AMG είναι ισοσκελές.

Γ4. Η γωνία $\hat{\Delta Ax'}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΔAG , άρα θα ισχύει:

$\hat{\Delta Ax'} > \hat{\Delta GA} = \hat{MGA}$. Όμως αποδείξαμε ότι το τρίγωνο AMG είναι ισοσκελές οπότε $\hat{MGA} = \hat{MAG}$, άρα $\hat{\Delta Ax'} > \hat{MAG}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε P εξωτερικό σημείο του κύκλου (Λ, ρ) άρα $PA = PB$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Έχουμε P εξωτερικό σημείο του κύκλου (K, R) άρα $PG = PD$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε: $PG = PD$

– $PA = PB$

$AG = BD$

Δ2.

1^{ος} Τρόπος

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα KAG και $KB\Delta$

- $\hat{KGA} = \hat{K\Delta B} = 90^\circ$
- $AG = B\Delta$ (από Δ1 ερώτημα)
- $KG = K\Delta$ (ως ακτίνες)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $KA = KB$ οπότε το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

2^{ος} Τρόπος

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Lambda K$ και $B\Lambda K$

- $A\Lambda = B\Lambda$ (ως ακτίνες)
- $\hat{A\Lambda K} = \hat{B\Lambda K}$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A\Lambda P}$ και $\hat{B\Lambda P}$) (έχουμε $\hat{A\Lambda P} = \hat{B\Lambda P}$ διότι η PL είναι διακεντρική ευθεία)
- $K\Lambda$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $KA = KB$

οπότε το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

3^{ος} Τρόπος

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΚΑΡ και ΚΒΡ

- $ΡΑ = ΡΒ$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)
- $\hat{Α}ΡΚ = \hat{Β}ΡΚ$ (η ΚΡ είναι διακεντρική ευθεία)
- ΚΡ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $ΚΑ = ΚΒ$
οπότε το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

Δ3. i) Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΚΑΛ έχουμε

$$ΚΑ < ΚΛ + ΛΑ \Leftrightarrow$$

$$ΚΑ < (R + \rho) + \rho \Leftrightarrow$$

$$ΚΑ < R + 2\rho \Leftrightarrow$$

$$ΚΑ < 2\rho + 2\rho \Leftrightarrow$$

$$ΚΑ < 4\rho$$

ii) Έχουμε $\Pi = ΚΑ + ΚΒ + ΑΒ$

από Δ3 i) ερώτημα έχουμε ότι $ΚΑ < 4\rho$

από Δ2 ερώτημα έχουμε ότι $ΚΑ = ΚΒ$ άρα $ΚΒ < 4\rho$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΛΒ έχουμε

$$ΑΒ < ΛΑ + ΛΒ \Leftrightarrow$$

$$ΑΒ < \rho + \rho \Leftrightarrow$$

$$ΑΒ < 2\rho$$

Άρα $ΚΑ < 4\rho$

$$ΚΒ < 4\rho$$

$$+ ΑΒ < 2\rho$$

$$\underline{ΚΑ + ΚΒ + ΑΒ < 4\rho + 4\rho + 2\rho \Leftrightarrow}$$

$$\Pi < 10\rho$$